《分权、集权与政企合谋》一文的数学附录

作者：聂辉华、张雨潇

1、 第一个（地方政府，中央政府不防合谋的情况）

（P1） $\max\limits_{\alpha,t} U_1^C(\alpha,t)=[(1-\alpha)tp-\rho a]\dfrac{\alpha tp+k_1(1-t)p}{k_1 c_L}$

$s.t.\ 0\le\alpha\le1, 0\le t\le1$

解：

建立一个新规划：

（P2） $\max\limits_{\alpha,t} U_1^C(\alpha,t)=[(1-\alpha)tp-\rho a]\dfrac{\alpha tp+k_1(1-t)p}{k_1 c_L}$

$s.t.\ \alpha\ge0, t\ge0$

由于(P1)的定义域是(P2)定义域的真子集，因此如果(P2)的解也在(P1)的定义域内，则一定也是(P1)的解。

令 $L=[(1-\alpha)tp-\rho a]\dfrac{\alpha tp+k_1(1-t)p}{k_1 c_L}+\lambda_1\alpha+\lambda_2 t$，那么由库恩塔克条件

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha}=\frac{p}{k_1c_L}\left\{\left[\left(1-\alpha\right)tp-\rho a\right]t-tp\left[\alpha t+k_1(1-t)\right]\right\}+\lambda_1=0 \tag{0.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{p}{k_1c_L}\left\{\left(1-\alpha\right)p\left[\alpha t+k_1\left(1-t\right)\right]+\left[\left(1-\alpha\right)tp-\rho a\right](\alpha-k_1)\right\}+\lambda_2=0 \tag{0.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda_1}\cdot\lambda_1=0 \tag{0.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda_2}\cdot\lambda_2=0 \tag{0.4}$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 时，由(1.1)、(1.2)解得

$\alpha=\dfrac{\rho a k_1-k_1 p}{\rho a-k_1 p}$

$$t=\frac{\rho a-k_1 p}{p-k_1 p}$$

易知，若 $\rho a>k_1 p$，则 $\alpha<0,t>0$；若 $\rho a<k_1 p$，则 $\alpha<0,t>0$。因此矛盾。此种情况不成立。

当 $\lambda_1\neq 0,\lambda_2\neq 0$ 时，由(1.3)、(1.4)可知 $\alpha=t=0$。此时：

$$U_1^C(\alpha,t)=-\rho a\frac{p}{c_L}$$

当 $\lambda_1=0,\lambda_2\neq 0$ 时，由(1.3)、(1.4)可知 $t=0$。此时：

$$U_1^C(\alpha,t)=-\rho a\frac{p}{c_L}$$

当 $\lambda_1\neq 0,\lambda_2=0$ 时，由(1.3)、(1.4)可知 $\alpha=0$。此时：

$$U_1^C(\alpha,t)=[tp-\rho a]\frac{(1-t)p}{c_L}$$

显然，$\alpha=0$ 时 $U_1^C(\alpha,t)$ 较大。

将 $\alpha=0$ 带入到原规划中，解得

$$\alpha_1^C=0，\ t_1^C=\frac{p+\rho a}{2p}$$

可知 $0\le\alpha_1^C\le 1$，$0\le t_1^C\le 1$，因此也是(P1)的解。

2、 第二个（地方政府，中央政府防合谋的情况）

$$\max_{\alpha,t,\beta,F_A,F_S} U=(1-\alpha)tpq_1^*=\frac{(1-\alpha)t(1-t)p^2}{c_H}$$

(P3)

$$\begin{aligned}
s.t.(AIR)\quad & (1-t)pq_1^*-c_H(q_1^*)\geq 0\\
(SIR)\quad & \alpha tpq_1^*\geq 0\\
(AIC)\quad & (1-t)pq_1^*-c_H(q_1^*)\geq(1-t)pq_1^*-c_L(q_1^*)-\beta[c_H(q_1^*)-c_L(q_1^*)]-\rho F_A\\
(SIC)\quad & \alpha tpq_1^*\geq\alpha tpq_1^*+\beta k_1[c_H(q_1^*)-c_L(q_1^*)]-\rho F_S\\
(ALL)\quad & F_A\leq(1-t)pq_1^*-c_L(q_1^*)-\beta[c_H(q_1^*)-c_L(q_1^*)]\\
(SLL)\quad & F_S\leq\alpha tpq_1^*+\beta k_1[c_H(q_1^*)-c_L(q_1^*)]
\end{aligned}$$

解：

先将六个约束条件进行化简。

(AIR)： $(1-t)pq_1^*-c_H(q_1^*)=\dfrac{(1-t)^2p^2}{2c_H}\geq 0$ 约束自然成立。

(SIR)： $\alpha tpq_1^*=\dfrac{\alpha t(1-t)p^2}{c_H}\geq 0$ 约束自然成立。

联立(AIC)与(ALL)消掉 F_A，可得新约束：

$$\frac{1-\beta+\rho\beta}{\rho}[c_H(q_1^*)-c_L(q_1^*)]\leq(1-t)pq_1^*-c_L(q_1^*)$$

联立(SIC)与(SLL)消掉 F_S，可得新约束：

$$\beta k_1\frac{1-\rho}{\rho}[c_H(q_1^*)-c_L(q_1^*)]\leq\alpha tpq_1^*$$

因此，(P3)就等价于：

$$\max_{\alpha,t,\beta} U=(1-\alpha)tpq_1^*=\frac{(1-\alpha)t(1-t)p^2}{c_H}$$

(P4)

$$\begin{aligned}
s.t.\quad (2.1)\quad & \frac{1-\beta+\rho\beta}{\rho}[c_H(q_1^*)-c_L(q_1^*)]\leq(1-t)pq_1^*-c_L(q_1^*)\\
(2.2)\quad & \beta k_1\frac{1-\rho}{\rho}[c_H(q_1^*)-c_L(q_1^*)]\leq\alpha tpq_1^*
\end{aligned}$$

使用库恩塔克条件即可解出

$$t=1-\frac{1}{2+2A}$$

$$\alpha=\frac{A}{1+2A}$$

其中

$$A=\frac{\beta k_1}{2}\frac{1-\rho}{\rho}(1-\frac{c_L}{c_H})$$

$$\beta=\frac{1}{1-\rho}-\frac{\rho}{1-\rho}\frac{2c_H-c_L}{c_H-c_L}$$

3、第三个（派出机构，中央政府防合谋）

(P5)
$$\begin{aligned}
&\max_{t,w,F_A,F_S} U=tpq_2^*-w=\frac{t(1-t)p^2}{c_H}-w\\
&s.t.(AIR)\ \ (1-t)pq_2^*-c_H(q_2^*)\geq 0\\
&\quad (SIR)\ \ w\geq 0\\
&\quad (AIC)\ \ (1-t)pq_2^*-c_H(q_2^*)\geq(1-t)pq_2^*-c_L(q_2^*)-\frac{1}{2}[c_H(q_2^*)-c_L(q_2^*)]-\rho F_A\\
&\quad (SIC)\ \ w\geq w+\frac{1}{2}k_2[c_H(q_2^*)-c_L(q_2^*)]-\rho F_S\\
&\quad (ALL)\ F_A\leq(1-t)pq_2^*-c_L(q_2^*)-\frac{1}{2}[c_H(q_2^*)-c_L(q_2^*)]\\
&\quad (SLL)\ \ F_S\leq w+\frac{1}{2}k_2[c_H(q_2^*)-c_L(q_2^*)]
\end{aligned}$$

解：

先将六个约束条件进行化简。

(AIR): $(1-t)pq_2^*-c_H(q_2^*)=\frac{(1-t)^2p^2}{2c_H}$ 约束自然成立

联立(AIC)与(ALL)消掉 F_A，可得新约束：

$$\frac{1+\rho}{2\rho}[c_H(q_2^*)-c_L(q_2^*)]\leq(1-t)pq_2^*-c_L(q_2^*)$$

进一步化简得 $\frac{1-\rho}{2\rho}\leq\frac{c_H}{c_{H-}c_L}$

可以注意到本约束与内生变量无关，只与外生变量ρ、c_H、c_L有关。

联立(SIC)与(SLL)消掉F_S，可得新约束：

$$\frac{1-\rho}{2\rho}k_2[c_H(q_2^*)-c_L(q_2^*)]\le w$$

因此，(P5)就等价于

$$\max_{t,w,F_A,F_S} U = tpq_2^* - w = \frac{t(1-t)p^2}{c_H} - w$$

(P6) $s.t.$ (3.1) $w \ge 0$

(3.2) $\frac{1-\rho}{2\rho}k_2[c_H(q_2^*)-c_L(q_2^*)]\le w$

使用库恩塔克条件即可解出

$$t = 1-\frac{B}{2B+2c_H}$$

$$w = \frac{Bp^2}{(2B+2c_H)^2}$$

其中$B=\frac{4\rho c_H^2}{k_2(1-\rho)(c_H-c_L)}$